Домашна работа 2 по Алгебра 1. 3 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

14 Ноември 2021

3 Въпрос Да се реши матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ -1 & 12 & -7 \\ 2 & 6 & -3 \\ -3 & 13 & -7 \end{pmatrix}$$

с числови коефициенти.

Решение:

Полагаме $Y = X \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и свеждаме към: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ -1 & 12 & -7 \\ 2 & 6 & -3 \\ -3 & 13 & -7 \end{pmatrix}$

Образуваме матрицата: $\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 8 & -5 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & -1 & 12 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 6 & -3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & -3 & 13 & -7 \end{array}\right)$

Умножаваме трети ред по -2 и събираме с първи, умножаваме трети по -3 и събираме с втори, умножаваме трети по -4 и събираме с четвърти. Получаваме:

$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -1 & -2 & 1 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -7 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & -11 & -11 & 5 \end{array}\right)$ Умножаваме първи ред по -1 и събираме с втори.
Умножаваме първи ред по -1 и събираме с четвърти.

$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -1 & -2 & 1 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -6 & -7 & 4 \end{array}\right)$ Умножаваме втори ред по -1 и събираме с първи.
Събираме втори ред с трети.
Умножаваме втори ред по -4 и събираме с четвърти.

$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Умножаваме четвърти ред по 2 и събираме с първи.
Умножаваме четвърти ред по -1 и събираме с трети.
Събираме първи ред с трети. Умножаваме първи ред по -1.

$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Разменяме първи ред с трети.
Разменяме втори с трети.
Разменяме трети с четвърти.

$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$

Лявата половина е в Гаус-Жорданов вид, следователно:

$$Y = X \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Транспонираме матричното уравнение и свеждаме към:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

От което образуваме матрицата

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} -2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Умножаваме втори ред по 2 и събираме с първи.
Събираме втори ред с трети. Умножаваме новополучелият се трети ред по -5 и събираме с първи.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Умножаваме първи ред по -1. Събираме първи ред с втори.
Умножвам трети по -2 и събираме с втори.
Разменяме първи с втори и втори с трети ред.

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Лявата половина е в Гаус-Жорданов вид.

$$\Longrightarrow X^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$